

Internationales Studienkolleg der Hochschule Kaiserslautern

Semester: Sommersemester 2022

FSP-Teilprüfung: Mathematik W2

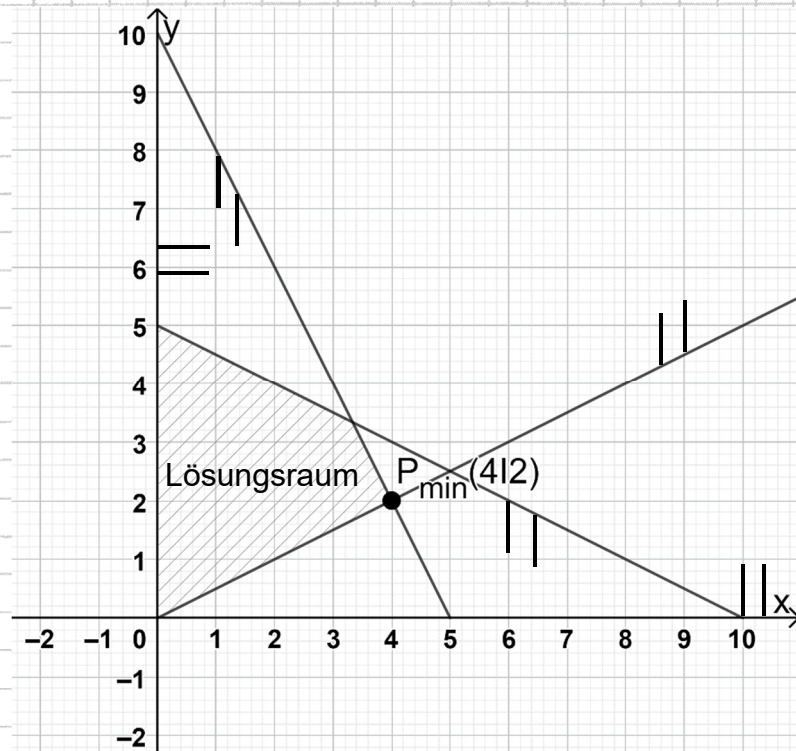
Datum: 08.06.2022

Dauer: 90 Minuten

Prüfer: Dr. Jens Siebel

Aufgabe 1

- a) Schreiben Sie eine mögliche Zielfunktion $z(x, y) = a \cdot x + b \cdot y + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ auf, die zu dem dargestellten linearen Minimierungsproblem mit der einzigen Lösung $x = 4$, $y = 2$ passt (3 Punkte).



- b) Zeichnen Sie die Niveaulinien $\bar{z} = 0$ und $\bar{z} = 1$ der Funktion

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{y}}{1,5^x} \quad D_{f_x} = \mathbb{R}, D_{f_y} = \mathbb{R}^{\geq 0} \text{ im Intervall } -2 < x \leq 2 \text{ (3 Punkte).}$$

- c) Bestimmen Sie sämtliche ersten und zweiten Ableitungen der Funktion

$$f(x, y) = x \cdot e^{x \cdot y} \quad D_f = \mathbb{R}^2 \text{ (6 Punkte).}$$

Aufgabe 2

Kreuzen Sie jeweils das Feld mit der einzigen richtigen Antwort an.

- 1 Punkt für jede richtige Antwort,
- 0 Punkte für jede falsche bzw. fehlende Antwort.

a)	Für eine Lagrange-Funktion $L(\lambda, x, y) = f(x, y) - \lambda \cdot g(x, y)$ gilt immer:			
	$L'_\lambda(\lambda, x, y) = g(x, y)$	$L''_{\lambda\lambda}(\lambda, x, y) = 0$	$L''_{x\lambda}(\lambda, x, y) = L''_{\lambda x}(\lambda, x, y)$	$L'_x(\lambda, x, y) = 1$
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
b)	$f'(x) = \ln(x)$ $\mathcal{D}_f =]0, \infty[$ ist die erste Ableitung von:			
	$f(x) = x \cdot \ln(x) - x$	$f(x) = x \cdot \ln(x) + x$	$f(x) = \frac{1}{2} \cdot [\ln(x)]^2$	$f(x) = x - x \cdot \ln(x)$
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
c)	Der maximale Wertebereich des Bestimmtheitsmaßes ist:			
	$[-1; 1]$ <input type="checkbox"/>	$]0; 1]$ <input type="checkbox"/>	$[0; 1]$ <input type="checkbox"/>	$[0; 1[$ <input type="checkbox"/>
d)	$f(x, y) = (5 - x)^2 + (y + 6)^2$ $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$ hat den Tiefpunkt:			
	$P_{\min}(5 -6 1)$	$P_{\min}(5 6 0)$	$P_{\min}(-5 6 0)$	$P_{\min}(5 -6 0)$
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
e)	Bei welcher Urliste gilt $S^* = 0$?			
	-2, -1, 1, 2 <input type="checkbox"/>	1, 1, 1, 1 <input type="checkbox"/>	1, -1, 1, -1 <input type="checkbox"/>	0, 1, 0, 1 <input type="checkbox"/>
f)	$f(x) = (x - 2)^2 + 1$ $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ hat eine steigende Tangente an der Stelle:			
	$x = 0$ <input type="checkbox"/>	$x = 1$ <input type="checkbox"/>	$x = 2$ <input type="checkbox"/>	$x = 3$ <input type="checkbox"/>
g)	Wir haben $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}$. Was kann man hier nicht berechnen?			
	$A \cdot B$ <input type="checkbox"/>	$A^T \cdot B$ <input type="checkbox"/>	$A \cdot B^T$ <input type="checkbox"/>	$B^T \cdot A$ <input type="checkbox"/>
h)	Beim Newton-Verfahren gilt für $f(x) = e^x + x$ $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ mit $x_0 = 0$:			
	$x_1 = -1$ <input type="checkbox"/>	$x_1 = -0,5$ <input type="checkbox"/>	$x_1 = 0,5$ <input type="checkbox"/>	$x_1 = 1$ <input type="checkbox"/>
i)	Für welche Funktion gilt $f'(x) = [f(x)]^2$?			
	$f(x) = 1$ <input type="checkbox"/>	$f(x) = e^{2^x}$ <input type="checkbox"/>	$f(x) = -\frac{1}{x}$ <input type="checkbox"/>	$f(x) = \frac{1}{x}$ <input type="checkbox"/>

j)	Das LGS $\begin{pmatrix} e & e^2 & 1 \\ 1 & a & 1/e \end{pmatrix}$ hat unendlich viele Lösungen für:			
	$a = -e$ <input type="checkbox"/>	$a = 0$ <input type="checkbox"/>	$a = 1$ <input type="checkbox"/>	$a = e$ <input type="checkbox"/>
k)	Gesamtnachfragefunktion: $x = X^{NG}(p_x) = 200 - p_x$, aktueller Preis: $p_{x0} = 100\text{€}$. Um wieviel % sinkt die Gesamtnachfrage, wenn der Preis um 1% steigt?			
	0,5% <input type="checkbox"/>	1% <input type="checkbox"/>	2% <input type="checkbox"/>	0% <input type="checkbox"/>
l)	$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} =$			
	1 <input type="checkbox"/>	$-\infty$ <input type="checkbox"/>	0 <input type="checkbox"/>	∞ <input type="checkbox"/>

(12 Punkte)

Aufgabe 3

a) Bestimmen Sie die Determinante folgender Matrix (mit Lösungsweg):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -7 \end{pmatrix} \quad (4 \text{ Punkte}).$$

b) Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem (mit Lösungsweg):

$$a + b + c + d = 1$$

$$2 \cdot c + 2 \cdot d = 2$$

$$a - b - c - d = 1$$

$$2 \cdot a + b + d = 2$$

(8 Punkte).

Aufgabe 4Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^3 + \frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{15}{4} \cdot x$ $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie alle Nullstellen (2 Punkte).

b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt mit der y-Achse (1 Punkt).

c) Bestimmen Sie alle Hoch- und Tiefpunkte (5 Punkte).

d) Bestimmen Sie alle Wendepunkte. Geben Sie auch die Krümmungsbereiche an (4 Punkte).

Aufgabe 5

a) In der Tabelle sehen Sie die Anzahl der W2-Studenten in den letzten sechs Semestern:

	WS 19/20	SS 20	WS 20/21	SS 21	WS 21/22	SS 22
Anzahl	13	19	13	18	14	17

a1) Bestimmen Sie den Median der Anzahl der W2-Studenten (1 Punkt).

a2) Zeichnen Sie die Verteilungsfunktion der Anzahl der W2-Studenten (2 Punkte).

b) Die Tabelle zeigt am 28.04.2022 für verschiedene Bundesländer:

- den Anteil der doppelt gegen Corona geimpften Personen an der Gesamtbevölkerung,
- den Anteil der bereits mit Corona infizierten Personen an der Gesamtbevölkerung¹:

Bundesland	Doppelt Geimpfte (X)	Bereits Infizierte (Y)
Sachsen	64,7%	36,1%
Schleswig-Holstein	80,9%	22,4%
Bayern	74,9%	35,2%
Rheinland-Pfalz	75,3%	26,1%
Thüringen	70,4%	32,5%

Hinweise:

- durchschnittlicher Anteil der doppelt Geimpften: 73,24%
- durchschnittlicher Anteil der bereits Infizierten: 30,46%
- Standardabweichung des Anteils der doppelt Geimpften: 5,4161
- Rechnen Sie bei allen Schritten auf vier Nachkommastellen genau.

b1) Geben Sie an, welche Art von Korrelation zwischen den Anteilen der doppelt Geimpften und der bereits Infizierten in den genannten Bundesländern besteht (mit Lösungsweg). Interpretieren Sie Ihr Ergebnis (7 Punkte).

b2) Bestimmen Sie die Regressionsgerade (2 Punkte).

¹ Quellen: <https://www.corona-in-zahlen.de/bundeslaender/> und <https://www.corona-in-zahlen.de/impfungen/> (30.04.2022)